CHAPITRE 1

INTERPOLATION POLYNÔMIALE

CHAPITRE 2

INTÉGRATION NUMÉRIQUE

2.1 Quelques outils de base

Avant d'aborder le sujet de ce chapitre, rappelons ou donnons quelques outils mathématiques de base qui sont nécessaires pour aborder ce chapitre.

Théorème 2.1. *(1ère formule de la moyenne -cas continu-)*
Soient u et v deux fonctions continues sur $[a,b]$ telles que u est de signe constant dans $[a,b]$. Alors

$$\exists \eta \in]a,b[\quad \textit{tel que} \quad \int_a^b u(t)v(t)dt = v(\eta)\int_a^b u(t)dt.$$

Théorème 2.2. *(2ème formule de la moyenne -cas discret-)*
Soient v une fonction continue sur $[a,b]$, $t_1, t_2, \ldots, t_s$, $(s+1)$ points de l'intervalle $[a,b]$ et $u_1, u_2, \ldots, u_s$, $(s+1)$ constantes, toutes de même signe. Alors

$$\exists \eta \in [a,b] \quad \textit{tel que} \quad \sum_{k=0}^{s} u_k v(t_k) = v(\eta)\sum_{k=0}^{s} u_k.$$

Théorème 2.3. *(1ère formule de l'erreur d'interpolation)*
Soient f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ et p_n le polynôme d'interpolation de la fonction f aux abscisses $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \in [a,b]$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$). Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\exists \xi_x \in]a,b[\quad \textit{tel que} \quad e(x) := f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Théorème 2.4. *(2ème formule de l'erreur d'interpolation)*
Soient f une fonction de classe C^{n+1} sur $[a,b]$ et p_n le polynôme d'interpolation de la fonction f aux abscisses $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($x_i \in [a,b]$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$). Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e(x) := f(x) - p_n(x) = [f(x_0), \ldots, f(x_n), f(x)]\prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Théorème 2.5. *(Théorème de Cauchy)*
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $[a, b]$ contenant les points deux à deux distincts xi, $i = 0, 1, \dots, n$. Alors pour tout $x \in [\min_i(x_i), max_i(x_i)]$

$$\exists \xi_x \in [\min_i(x_i), \max_i(x_i)] \quad \textit{tel que} \quad [f(x_0), \dots, f(x_n), f(x)] = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}.$$

2.2 Introduction

On désire calculer les intégrales suivantes :

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx, \quad \int_{-1}^1 e^{\sin(x)} dx, \quad \dots$$

- **Problème :** on n'a pas d'expression analytique de la primitive des fonctions :

$$x \longmapsto e^{-x^2}, \quad x \longmapsto \sqrt{1 + \cos^2(x)}, \quad x \longmapsto e^{\sin(x)}, \quad \dots$$

- **Solution :** on va appliquer des méthodes numériques pour évaluer (approcher, approximer) la valeur de l'intégrale donnée.

Ainsi, le problème posé peut être formulé de la façon suivante : étant donnée une fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue (ou dérivable, de classe $\mathcal{C}^\infty, \dots$), on se propose de calculer numériquement la quantité

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

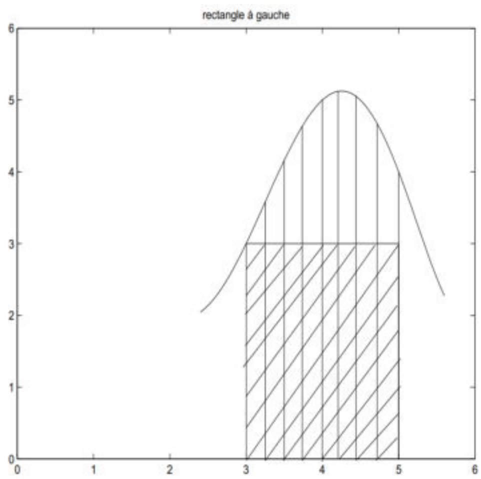
2.3 Quelques formules d'intégration "simples"

2.3.1 Formule du rectangle

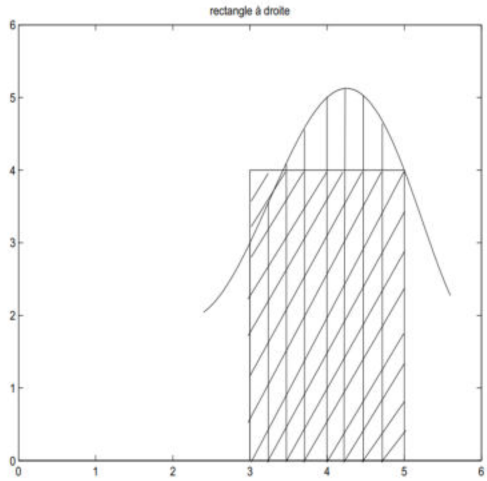
- **Rectangle à gauche :** La valeur de $I(f)$ est approchée par l'aire du rectangle $\mathcal{R}$ de sommets $(a, 0), (a, f(a)), (b, f(a)), (b, 0)$ comme illustré par la figure ci-contre :

  Ainsi on a

$$I(f) \simeq (b - a) f(a).$$



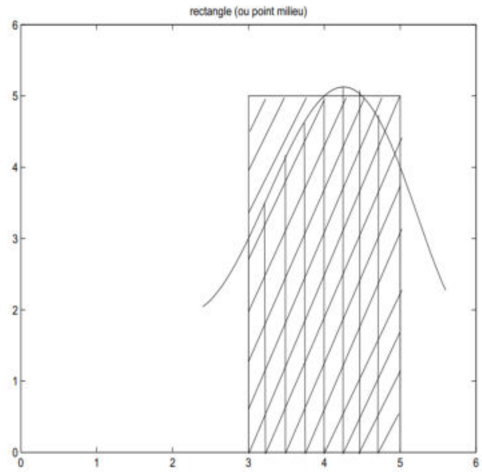
- **Rectangle à droite :** La valeur de $I(f)$ est approchée par l'aire du rectangle $\mathcal{R}$ de sommets $(a,0),(a,f(b)),(b,f(b)),(b,0)$ comme illustré par la figure ci-contre :



  Ainsi on a

$$I(f) \simeq (b-a)f(b).$$

- **Rectangle (ou point milieu) :** La valeur de $I(f)$ est approchée par l'aire du rectangle $\mathcal{R}$ de sommets $(a,0),(a,f(\frac{a+b}{2})),(b,f(\frac{a+b}{2})),(b,0)$ comme illustré par la figure ci-contre :

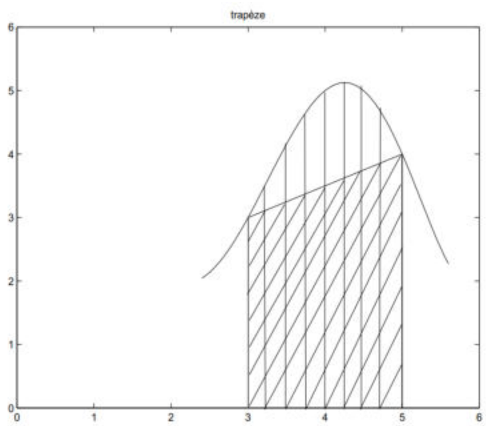


  Ainsi on a

$$I(f) \simeq (b-a)f(\frac{a+b}{2}).$$

2.3.2 Formule des trapèzes

La valeur de $I(f)$ est approchée par l'aire du trapèze $\mathcal{T}$ de sommets $(a,0),(a,f(a)),(b,f(b)),(b,0)$ comme illustré par la figure ci-contre :

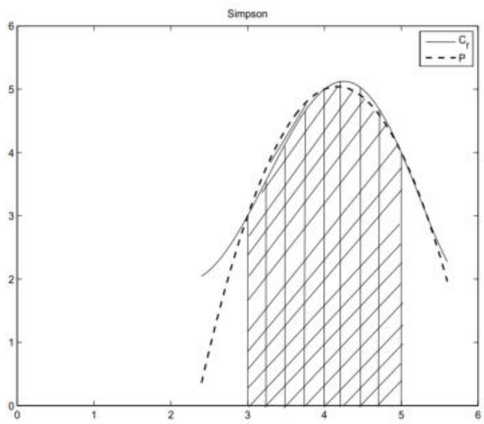


Ainsi on a

$$I(f) \simeq \frac{1}{2}(b-a)\big(f(a)+f(b)\big).$$

2.3.3 Formule de Simpson

La valeur de $I(f)$ est approchée par l'aire de la parabole $\mathcal{P}$ passant par les points $(a, f(a))$, $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ et $(b, f(b))$ comme illustré par la figure ci-contre :



Ainsi on a

$$I(f) \simeq \frac{1}{6}(b-a)\big(f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)\big).$$

2.4 Obtention des formules de quadrature

Soit f une fonction réelle définie sur $[a, b]$, on désire calculer une valeur approchée de l'intégrale

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

2.4.1 L'idée

L'idée de base est d'écrire

$$f(x) = p(x) + e(x), \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Où p est le polynôme interpolant f en des abscisses $x_0, x_1, \dots, x_n$ ($x_i \in [a, b]$) et $e(x)$ étant l'erreur d'interpolation. Ainsi, en intégrant on obtient :

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx = \underbrace{\int_a^b p(x)dx}_{:=I_Q(f)} + \underbrace{\int_a^b e(x)dx}_{:=E_Q(f)}.$$

En utilisant la base de Lagrange, le polynôme d'interpolation $p := p_n$ s'écrit :

$$p(x) = p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x),$$

et l'erreur d'interpolation e s'écrit

$$e(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i).$$

Ainsi
$$I_Q(f) = \int_a^b p_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_a^b L_i(x)dx,$$
c'est à dire
$$I_Q(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i), \quad \text{où } w_i = \int_a^b L_i(x)dx.$$

Remarque 2.1. *1. Les abscisses x_i $(i = 0, 1, \dots, n)$ sont appelés les noeuds.*

2. *Les coefficients w_i (appelés poids) ne dépendent pas de la fonction f.*
3. *La quantité $I_Q(f) = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$ représente la valeur approchée de $I(f)$, on écrit alors : $I(f) \simeq I_Q(f)$.*
4. *Les coefficients w_i sont déterminés de telle sorte que l'erreur de quadrature $E_Q(f)$ soit nulle lorsque $f \in E$ où E est un ensemble à préciser. En général E est l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n, i.e., $E = \mathbb{P}_n = \mathbb{R}_n[X]$.*

Définition 2.1. *On dit que la formule de quadrature*
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + E_Q(f),$$
est exacte sur l'ensemble E si et seulement si $E_Q(g) = 0$ pour tout $g \in E$.

2.4.2 Etude de quelques exemples classiques

- Cas $n = 0$ et $x_0 = a$. La formule de quadrature s'écrit :
$$\int_a^b f(x)dx = w_0 f(a) + E_Q(f) \tag{Q}$$
où $E_Q(g) = 0$ pour tout $g \in \mathbb{R}_0[X]$.

Ainsi, en prenant $g \equiv 1$ (i.e. $g(x) = 1$ pour tout $x \in [a, b]$), alors la formule de quadrature (Q) donne que $b - a = w_0$ et pour déterminer l'erreur $E_Q(f)$, on sait que
$$E_Q(f) = \int_a^b \underbrace{(x-a)}_{:=u(x)\geq 0} \underbrace{f'(\xi_x)}_{:=v(x)} dx, \quad \text{où } \xi_x \in]a, b[.$$
Ainsi, en appliquant la première formule de la moyenne, on a $\exists \alpha \in]a, b[$ tel que
$$E_Q(f) = f'(\alpha)\Big[\frac{1}{2}(x-a)^2\Big]_a^b = \frac{(b-a)^2}{2} f'(\alpha).$$
Finalement, on a
$$I(f) = (b-a)f(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(\alpha), \quad \text{où } \alpha \in]a, b[$$
et $I(f)$ est approchée par $(b-a)f(a)$, i.e., $I(f) \simeq (b-a)f(a)$. On remarque alors que l'on retrouve la formule du rectangle à gauche qui est exacte sur $\mathbb{P}_0$.

- Cas $n = 0$ et $x_0 = b$. De la même façon que précédemment, la formule de quadrature s'écrit :

$$\int_a^b f(x)dx = w_0 f(b) + E_Q(f) \tag{Q}$$

où $E_Q(g) = 0$ pour tout $g \in \mathbb{R}_0[X]$. Et on vérifie que l'on retrouve la formule du rectangle à droite qui est exacte également sur $\mathbb{P}_0$ et qui est donnée par

$$I(f) = (b-a)f(b) + \frac{(b-a)^2}{2} f'(\beta), \quad \text{où } \beta \in]a, b[.$$

- Cas $n = 0$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$. Dans ce cas, la formule de quadrature s'écrit :

$$\int_a^b f(x)dx = w_0 f(\frac{a+b}{2}) + E_Q(f) \tag{Q}$$

En écrivant que $I_Q(g)$ est exacte sur $\mathbb{P}_0$, i.e., $E_Q(g) = 0$ pour $g \equiv 1$, on vérifie que $w_0 = b-a$. Ainsi, $I(f) = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + E_Q(f)$, avec

$$E_Q(f) = \int_a^b (x - \frac{a+b}{2}) f'(\xi_x) dx, \quad (\xi_x \in]a, b[).$$

Notons que la fonction $x \longmapsto x - \frac{a+b}{2}$ change de signe dans $[a, b]$ et donc on ne peut pas appliquer la première formule de la moyenne. Pour déterminer l'erreur de quadrature, on va utiliser la deuxième expression de l'erreur d'interpolation à savoir que :

$$E_Q(f) = \int_a^b (x - x_0)[f(x_0), f(x)]dx, \quad \text{avec } x_0 = \frac{a+b}{2}.$$

En utilisant la décomposition suivante :

$$(x - x_0)[f(x_0), f(x_0), f(x)] = [f(x_0), f(x)] - [f(x_0), f(x_0)],$$

on a

$$\begin{aligned}
E_Q(f) &= \int_a^b \big([f(x_0), f(x_0)] + (x - x_0)[f(x_0), f(x_0), f(x)]\big)(x - x_0)dx \\
&= \int_a^b [f(x_0), f(x_0)](x - x_0)dx + \int_a^b [f(x_0), f(x_0), f(x)](x - x_0)^2 dx \\
&= [f(x_0), f(x_0)] \underbrace{\int_a^b (x - x_0)dx}_{=0} + \int_a^b \underbrace{[f(x_0), f(x_0), f(x)]}_{:=v(x)} \underbrace{(x - x_0)^2}_{:=u(x)\geq 0} dx \\
&= [f(x_0), f(x_0), f(\gamma)] \int_a^b (x - x_0)^2 dx \quad \text{où } \gamma \in]a, b[
\end{aligned}$$

où on a appliqué la première formule de la moyenne. Finalement, en utilisant le théorème de Cauchy, on obtient la formule de quadrature du point milieu qui s'écrit :

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24} f''(\lambda) \quad \text{où } \lambda \in]a, b[.$$

Remarque 2.2. *On note que la formule du rectangle est encore exacte sur $\mathbb{P}_1$ et pas simplement sur $\mathbb{P}_0$ alors que les formules du rectangle à gauche et à droites sont exactes uniquement sur $\mathbb{P}_0$.*

- Cas $n = 1$ et $x_0 = a$, $x_1 = b$. Dans ce cas, la formule de quadrature s'écrit :

$$\int_a^b f(x)dx = w_0 f(a) + w_1 f(b) + E_Q(f) \tag{Q}$$

où $E_Q(g) = 0$ pour tout $g \in \mathbb{R}_1[X]$.

En prenant respectivement $g \equiv 1$ puis $g \equiv x$ dans la formule de quadrature (Q), alors par un simple calcul, on trouve que $w_0 = w_1 = \frac{1}{2}(b-a)$. Ainsi, on a

$$I(f) = \frac{1}{2}(b-a)\big(f(a) + f(b)\big) + E_Q(f),$$

avec

$$E_Q(f) = \int_a^b \underbrace{(x-x_0)(x-x_1)}_{:=u(x)} \underbrace{[f(x_0), f(x_1), f(x)]}_{:=v(x)} dx, \quad \text{avec } x_0 = a \text{ et } x_1 = b.$$

En utilisant respectivement la 1ère formule de la moyenne et le théorème de Cauchy, on a :

$$\begin{aligned} E_Q(f) &= [f(x_0), f(x_1), f(\xi)] \int_a^b (x-a)(x-b)dx, \quad \text{où } \xi \in]a, b[, \\ &= \frac{f''(\eta)}{2} \int_a^b (x-a)(x-b)dx, \\ &= \frac{-1}{12}(b-a)^3 f''(\eta). \end{aligned}$$

Finalement, on voit que la formule obtenue est celle du trapèze. Cette formule s'écrit

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2}(b-a)\big(f(a) + f(b)\big) - \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\eta), \quad \text{où } \eta \in]a, b[.$$

Remarque 2.3. *On note que la formule du trapèze est exacte seulement sur $\mathbb{P}_1$.*

- Cas $n = 2$ et $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$. La formule de quadrature s'écrit :

$$\int_a^b f(x)dx = w_0 f(a) + w_1 f(\frac{a+b}{2}) + w_2 f(b) + E_Q(f) \tag{Q}$$

où $E_Q(g) = 0$ pour tout $g \in \mathbb{R}_2[X]$.

En écrivant que $E_Q(g) = 0$ pour $g \equiv 1$, $g \equiv x$ et $g \equiv x^2$, on obtient le système

$$\begin{cases} \int_a^b 1dx = w_0 + w_1 + w_2 \\ \int_a^b xdx = w_0x_0 + w_1x_1 + w_2x_2 \\ \int_a^b x^2dx = w_0x_0^2 + w_1x_1^2 + w_2x_2^2 \end{cases}$$

où $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$. Ainsi, en développant les calculs, on obtient le système

$$\begin{cases} w_0 + w_1 + w_2 = b - a \\ aw_0 + (\frac{a+b}{2})w_1 + bw_2 = \frac{b^2-a^2}{2} \\ a^2w_0 + (\frac{a+b}{2})^2w_1 + b^2w_2 = \frac{b^3-a^3}{3}, \end{cases}$$

dont la solution est $w_0 = w_1 = \frac{b-a}{6}$ et $w_2 = \frac{2}{3}(b-a)$.

En utilisant une démarche similaire à celle des cas précédents, on montre que l'erreur de quadrature $E_Q(f)$ est donnée par $E_Q(f) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\mu)$ où $\mu \in]a, b[$.

Finalement, la formule qu'on retrouve pour le cas $n = 2$, $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$ et $x_2 = b$ est celle de Simpson. Cette formule s'écrit :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{6}(b-a)\big(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\big) - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\mu), \quad \text{où } \mu \in]a, b[.$$

Remarque 2.4. *On note que la formule de Simpson est exacte sur $\mathbb{P}_3$ et pas simplement sur $\mathbb{P}_2$.*

2.5 Les formules composites

L'idée des méthodes composites est simple et repose sur la linéarité de l'intégrale. En effet, on peut écrire

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \ldots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx,$$

où $x_0 = a$, $x_n = b$ et $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ sont des points de l'intervalle $[a, b]$. Généralement, ces points sont équidistants mais dans certains cas le choix de ces points peut tenir compte de l'allure de la courbe de la fonction f à intégrer (si cette allure est connue).

Dans la suite, on considère que les points $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sont équidistants, i.e., $x_i = a + ih$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$ où $h = \frac{b-a}{n}$. Ainsi,

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx}_{:=I_k},$$

et alors, on doit calculer une valeur approchée de l'intégrale I_k à l'aide d'une formule de quadrature (de type Newton-Cotes) avec n généralement faible, $n = 0, 1, 2$.

2.5.1 Formule composite du rectangle

Sachant que

$$\begin{aligned} I_k &= (x_{k+1}-x_k)f(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}) + \frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{24}f''(\lambda_k) \quad \text{où } \lambda_k \in]x_k, x_{k+1}[, \\ &= hf(x_k+\frac{h}{2}) + \frac{h^3}{24}f''(\lambda_k). \end{aligned}$$

Il vient, en utilisant la première formule de la moyenne pour le cas discret, que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= h\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k+\frac{h}{2}) + \frac{h^3}{24}\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{1}_{:=v_k}\underbrace{f''(\lambda_k)}_{:=u(\lambda_k)} \\ &= h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+(2k+1)\frac{h}{2}) + \frac{h^3}{24}f''(\lambda)\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}1}_{=n} \quad \text{où } \lambda \in]a,b[\\ &= \underbrace{h\sum_{k=0}^{n-1} f(a+(2k+1)\frac{h}{2})}_{:=I_{0,n}(f)} + \underbrace{\frac{(b-a)}{24}h^2 f''(\lambda)}_{:=E_{0,n}(f)}. \end{aligned}$$

2.5.2 Formule composite du trapèze

Dans le cas de la formule du trapèze, on a

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{2}(x_{k+1}-x_k)\big(f(x_k)+f(x_{k+1})\big) - \frac{1}{12}(x_{k+1}-x_k)^3 f''(\eta_k) \quad \text{où } \eta_k \in]x_k, x_{k+1}[, \\ &= \frac{1}{2}h\big(f(a+kh)+f(a+(k+1)h)\big) - \frac{1}{12}h^3 f''(\eta_k). \end{aligned}$$

De même, en utilisant la première formule de la moyenne pour le cas discret, on vérifie que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{2}\Big(\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh) + \sum_{k=0}^{n-1} f(a+(k+1)h)\Big) - \frac{1}{12}h^3\sum_{k=0}^{n-1} f''(\eta_k) \\ &= \frac{h}{2}\Big(f(a) + 2\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh) + f(b)\Big) - \frac{1}{12}h^3 n f''(\eta), \quad \text{où } \eta \in]a,b[\\ &= \underbrace{h\Big(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh) + \frac{1}{2}f(b)\Big)}_{:=I_{1,n}(f)} - \underbrace{\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\eta)}_{:=E_{1,n}(f)}. \end{aligned}$$

2.5.3 Formule composite de Simpson

Dans ce cas, on rappelle que

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{1}{6}(x_{k+1}-x_k)\big(f(x_k)+4f(\frac{x_k+x_{k+1}}{2})+f(x_{k+1})\big)-\frac{1}{2880}(x_{k+1}-x_k)^5 f^{(4)}(\nu_k) \quad \text{où } \nu_k \in]x_k, x_{k+1}[, \\ &= \frac{1}{6}h\big(f(a+kh)+4f(a+(k+1)\frac{h}{2})+f(a+(k+1)h)\big)-\frac{1}{2880}h^5 f^{(4)}(\nu_k). \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant des calculs et critères similaires à ceux des formules composites du rectangle ou du trapèze, on montre que

$$\int_a^b f(x)dx = \underbrace{\frac{h}{6}\Big(f(a)+2\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(a+(2k+1)\frac{h}{2})+f(b)\Big)}_{:=I_{2,n}(f)} - \underbrace{\frac{(b-a)}{2880}h^4 f^{(4)}(\nu)}_{:=E_{2,n}(f)} \quad \text{où } \nu \in]a,b[.$$

2.6 Formules de Gauss

Toutes les formules de quadrature vues précédemment sont de la forme (dite interpolatoire). En effet, si p_n interpole f aux abscisses fixées $x_0, x_1, \ldots, x_n$ alors

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i) + E_Q(f) \tag{Q}$$

où les $w_i = \int_a^b L_i(x)dx$ ne dépendent pas de f. De plus la formule (Q) est exacte sur $\mathbb{P}_n$.

Maintenant, on considère, le problème suivant : étant donnée la formule de quadrature (Q), on cherche à déterminer les coefficients w_i ainsi que les abscisses $x_i,\ i=0,1,\ldots,n$ pour que cette formule de quadrature soit exacte sur $\mathbb{P}_{2n+1}$.

2.6.1 Cas $n=0$

La forme de quadrature que l'on cherche à la forme suivante :

$$\int_a^b f(x)dx \simeq w_0 f(x_0), \tag{Q}$$

où les inconnues w_0 et x_0 sont à déterminer. En écrivant que (Q) est exacte sur $\mathbb{P}_1$, c'est à dire que

$$\int_a^b g(x)dx = w_0 g(x_0) \ \text{ pour } g \in \{1, x\},$$

on obtient les deux équations

$$\begin{cases} \int_a^b 1dx = w_0 \\ \int_a^b xdx = w_0 x_0 \end{cases}$$

c'est à dire

$$\begin{cases} w_0 = b - a \\ w_0 x_0 = \frac{b^2 - a^2}{2} \end{cases}$$

et donc $w_0 = b - a$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$. On voit alors que l'on retrouve la formule du point milieu.

$$\int_a^b f(x)dx \simeq (b-a) f(\frac{a+b}{2}).$$

2.6.2 Cas $n = 1$

La formule de quadrature recherchée à la forme

$$\int_a^b f(x)dx \simeq w_0 f(x_0) + w_1 f(x_1), \tag{Q}$$

où les coefficients w_0, w_1 et les abscisses x_0, x_1 sont à déterminer en imposant que (Q) doit être exacte sur $\mathbb{P}_3$.

Pour résoudre ce problème tout en simplifiant les calculs, on va travailler sur l'intervalle $[-1, 1]$, puis on se ramènera sur l'intervalle $[a, b]$ à l'aide du changement de variable

$$x(t) = \alpha t + \beta, \quad \text{avec } x := x(t) \in [a, b] \text{ et } t \in [-1, 1],$$

et où $\alpha = \frac{b-a}{2}$ et $\beta = \frac{a+b}{2}$. Ainsi, comme $dx = \alpha dt$, $x(-1) = a$ et $x(1) = b$, il vient que :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 h(t)dt,$$

où $h(t) = f(\alpha t + \beta) = (f \circ x)(t)$. Ainsi, en posant

$$\int_{-1}^1 h(t)dt \simeq w_0' h(t_0) + w_1' h(t_1), \tag{Q'}$$

on reformule le problème comme suit :

Trouver t_0, t_1 et w_0', w_1' tels que la formule (Q') soit exacte pour $g \in \{1, t, t^2, t^3\}$. Cette dernière condition fournit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} w_0' + w_1' & = & 2 & (1) \\ w_0' t_0 + w_1' t_1 & = & 0 & (2) \\ w_0' t_0^2 + w_1' t_1^2 & = & \frac{2}{3} & (3) \\ w_0' t_0^3 + w_1' t_1^3 & = & 0 & (4) \end{cases}$$

En multipliant les équations (1), (2) et (3) par t_0 et en retranchant respectivement les équations (2), (3) et (4), on trouve que

$$t_0 t_1 = -\frac{1}{3}, \quad t_0 = -t_1 \quad \text{et} \quad w_0' + w_1' = 2, \quad w_0' - w_1' = 0.$$

Finalement, on prend $t_0 = -t_1 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ et $w'_0 = w'_1 = 1$, et la formule de quadrature (Q') recherchée est donc

$$\int_{-1}^{1} h(t)dt \simeq h(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + h(\frac{1}{\sqrt{3}}), \tag{Q'}$$

et la formule de quadrature (Q) s'obtient en écrivant

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &\simeq \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} h(t)dt \\
&\simeq \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} (f\circ x)(t)dt \\
&\simeq \frac{b-a}{2}\Big[(f\circ x)(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + (f\circ x)(\frac{1}{\sqrt{3}})\Big] \\
&\simeq \frac{b-a}{2}\Big[f(\frac{a-b}{\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2}) + f(\frac{b-a}{\sqrt{3}} + \frac{a+b}{2})\Big].
\end{aligned}$$